Über die konvexen Körper, 
die sich einem Sternkörper einbeschreiben lassen

Von
KURT MAHLER

Bezeichnungen (für nähere Einzelheiten s. den Enzyklopädie-Artikel Nr. 27 von KELLER):

\( R_n \) ist der affine Raum aller Punkte oder Vektoren \( X = (x_1, \ldots, x_n) \) mit reellen \( x_1, \ldots, x_n \). Sind \( X^{(1)}, \ldots, X^{(n)} \) irgend \( n \) linear-unabhängige Punkte in \( R_n \), so bedeute \( \{X^{(1)}, \ldots, X^{(n)}\} \) ihre Determinante. Diese Punkte erzeugen ein Gitter \( A \), welches aus allen \( u_1X^{(1)} + \cdots + u_nX^{(n)} \) mit ganzen \( u_1, \ldots, u_n \) besteht und die Determinante \( \Delta = \begin{vmatrix} X^{(1)} & \cdots & X^{(n)} \end{vmatrix} \) hat. Ist \( S \) eine beliebige Punktmengen in \( R_n \), so heißt \( A \) \( S \)-zulässig falls, außer vielleicht dem Ursprung \( O = (0, \ldots, 0) \), kein Punkt von \( A \) innerer Punkt von \( S \) ist. Unter der Gitterdeterminante \( \Delta(S) \) von \( S \) ist als dann die untere Grenze von \( \Delta(A) \), erstreckt über alle \( S \)-zulässigen Gitter, verstanden. Ein \( S \)-zulässiges Gitter \( A \) mit \( \Delta(A) = \Delta(S) \) heißt ein kritisches Gitter von \( S \).

Die Punktmengen \( S \) ist ein Strahlenkörper, falls \( O \) innerer Punkt ist und falls ferner für \( X \in S \) und \(-1 < t < 1 \) auch \( tX \) zu \( S \) gehört. Ist für \( X \in S \) und \(-1 < t < 1 \) sogar \( tX \) ein innerer Punkt von \( S \), so heißt \( S \) ein Sternkörper.

Sei \( n \geq 2 \), \( S \) ein beschränkter Sternkörper\(^1\) in \( R_n \), und \( K \) ein \( S \) einbe- schriebener konvexer Körper von größtmäßigem Inhalt \( V(K) \). (Mit Hilfe des Satzes von BLASCHKE über Folgen konvexer Körper zeigt man leicht die Existenz eines solchen Körpers \( K \).) Man kann die Frage aufwenden, ob es eine nicht-triviale positive untere Schranke für \( V(K) \) gibt, die allein von einem geeigneten Funktional von \( S \) abhängt.

Es ist leicht einzusehen, daß eine solche Schranke für \( V(K) \) nicht nur von dem Inhalt \( V(S) \) von \( S \) abhängen kann. Denn sei z.B. \( S_r \) der endliche Sternkörper

\[ S_r: \quad |x_1x_2 \cdots x_n| \leq 1, \quad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq r^2, \]

welcher in dem unendlichen Sternkörper

\[ S_\infty: \quad |x_1x_2 \cdots x_n| \leq 1 \]

enthält ist. Es ist wohlbekannt, daß \( S_\infty \) zwar eine endliche Gitterdeterminante \( \Delta(S_\infty) \) hat, daß aber sein Volumen \( V(S_\infty) \) unendlich groß ist. Man kann daher ein \( r \geq n \) so auswählen, daß

\[ V(S_r) \quad \text{beliebig groß, aber} \quad \frac{1}{2} \Delta(S_\infty) \leq \Delta(S_r) \leq \Delta(S_\infty) \]

\(^1\) Alle auftretenden konvexen Körper, Sternkörper und Strahlenkörper werden als symmetrisch in bezug auf den Ursprung \( O = (0, \ldots, 0) \) angenommen, es sei denn ausdrücklich das Gegenteil gesagt.
ist. Nun ist offenbar der konvexe Körper
\[ K_0 : |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \leq n \]
von Inhalt
\[ V(K_0) = \frac{(2n)^n}{n!} \]
eine Teilmenge von \( S \), und stellt zugleich den größten konvexen Körper dieser Art dar. Für diesen Körper kann \( V(K_0) / V(S) \) beliebig klein gemacht werden; dagegen bleibt \( V(K_0) / \Delta(S) \) für alle \( r \geq n \) größer als eine gewisse, nur von \( n \) abhängige positive Zahl.

Dieses Beispiel legt die Vermutung nahe, daß man auch im allgemeinen Falle \( V(K) \) mit \( \Delta(S) \) vergleichen muß und daß immer \( V(K) / \Delta(S) \geq c \) ist, wo die Konstante \( c > 0 \) nur von \( n \) abhängt. Merkwürdigerweise ist diese Vermutung jedoch falsch und gilt das folgende Ergebnis:

**Satz.** Sei \( \varepsilon > 0 \) beliebig klein. Dann gibt es einen beschränkten Sternkörper \( S \) in \( R_n \) mit der Eigenschaft \( V(K) < \varepsilon \Delta(S) \) für jeden in \( S \) enthaltenen konvexen Körper \( K \).

Der Beweis besteht aus zwei Teilen. Zuerst wird ein Strahlenkörper \( \Sigma^* \) konstruiert, welcher der Ungleichung
\[ V(K) < \frac{\varepsilon}{2} \Delta(\Sigma^*) \]
für jeden konvexen Körper \( K \subseteq \Sigma^* \) genügt. Danach wird in \( \Sigma^* \) ein Sternkörper \( S \) mit der Eigenschaft
\[ \Delta(S) > \frac{1}{2} \Delta(\Sigma^*) \]
einbeschrieben. Da aus \( K \subseteq S \) auch \( K \subseteq \Sigma^* \) folgt, so ist die Behauptung eine unmittelbare Folge von (a) und (b).

1. Der Mengenlehre entnehmen wir ohne Beweis den folgenden Hilfssatz:

**Lemma 1.** Es gibt eine unendliche Menge \( M \) reeller Zahlen, welche überall auf der reellen Achse dicht ist, derart, daß die Elemente jeder endlichen Teilmenge von \( M \) algebraisch unabhängig über dem Körper der rationalen Zahlen sind.

2. Wir bezeichnen mit \( \delta > 0 \) eine beliebig kleine und mit \( r > 1 \) eine beliebig große Zahl, weiter mit
\[ G_0 : |X| \leq \varrho \quad \text{und} \quad I_0 : |X| = \varrho \]
die Kugel vom Radius \( \varrho > 0 \) mit Mittelpunkt im Ursprung und ihre Oberfläche. Dabei bedeutet \( |X| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \) die Länge des Ortsvektors \( X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \). Im Falle der Einheitskugel lassen wir den Index \( 1 \) weg und schreiben \( G \) und \( I \) anstatt \( G_1 \) und \( I_1 \).

Durch jeden Punkt \( X \pm O \) geht genau eine Gerade \( L(X) \), welche den Ursprung enthält; sie besteht aus allen Punkten \( P = tX \) mit reelem \( t \). Diese Gerade schneidet \( I' \) in zwei Punkten \( + Q(X) \) und \( - Q(X) \), die in bezug auf \( O \)
symmetrisch liegen. Die Bezeichnung kann eindeutig gemacht werden, indem man etwa für $+Q(X)$ den Punkt mit positivem $t$ nimmt.

Aus Lemma 1 ergibt sich nun, daß man eine genügend große natürliche Zahl $N$ und dazu $N$ Punkte

$$X_h = (x_{h1}, x_{h2}, \ldots, x_{hn}) \quad (h = 1, 2, \ldots, N)$$
derart auswählen kann, daß die folgenden Forderungen erfüllt sind:

1) Die $nN$ Koordinaten $x_{hk}$ der Punkte $X_h$ sind verschiedene Elemente der Menge $M$; sie sind daher algebraisch unabhängig über dem rationalen Zahlkörper.

2) Jeder Punkt von $\Gamma$ hat eine Entfernung kleiner als $\delta$ von wenigstens einem der $2N$ Punkte

$$Q_h = +Q(X_h) \quad \text{und} \quad -Q_h = -Q(X_h) \quad (h = 1, 2, \ldots, N)$$
auf $\Gamma$. 2).

Es bedeute jetzt $\Sigma$ die Menge aller Punkte $X$ der Kugel $G_r$, die nicht von der Form

$$X = \pm t Q_h \quad \text{mit} \quad 1 \leq t \leq r \quad (h = 1, 2, \ldots, N)$$
sind; $\Sigma$ entsteht also aus $G_r$ indem man $2N$ Strecken der Länge $r - 1$ fortläßt. Natüglich ist $\Sigma$ kein Sternkörper; es ist jedoch ein Strahlenkörper. Denn wenn $X$ zu $\Sigma$ gehört, so gilt dasselbe für alle Punkte $sX$ mit $-1 \leq s \leq +1$. Die Kugel $G_\rho$ ist für $\rho < 1$, aber nicht für $\rho \geq 1$ in $\Sigma$ enthalten, und $\Sigma$ liegt seinerseits in $G_r$.

3. Lemma 2. Es gibt eine Zahl $c_1 > 0$, die nur von $n$ abhängt, so daß

$$V(K) < c_1 \max \left(1, \delta r^{n-1}\right)$$

für jeden in $\Sigma$ enthaltenen konvexen Körper $K$ ist.

Beweis. Sei $X_\xi$ ein Punkt von $K$, für den $|X_\xi| = \xi > 0$ ein Maximum ist. Im Falle $\xi \leq 2$ gilt die Ungleichung

$$V(K) \leq V(G_2),$$
da alsdann $K \subseteq G_2$ ist. Sei von nun an

$$\xi > 2.$$ Eine Rotation des Koordinatensystems hat keinen Einfluß auf die Behauptung. Wir dürfen daher ohne Verlust der Allgemeinheit annehmen, daß $X_\xi$ die Koordinaten

$$X_\xi = (0, 0, \ldots, \xi)$$

hat.

2) Zwei Punkte $X$ und $Y$ in $R^n$ haben die Entfernung $|X - Y|$. 
Weiter bedeute $K$ den Durchschnitt von $K$ mit der Koordinatenebene $x_n = 0$; $K$ ist also ein $(n-1)$-dimensionaler konvexer Körper. Es gibt einen Punkt

$$
\Xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, 0)
$$

auf der Begrenzung von $K$ mit kleiner Entfernung

$$
d = |\Xi| > 0
$$

von $O$. Die $(n-1)$-dimensionale Kugel

$$
z: \ |X| \leq d, \ x_n = 0,
$$

in der Ebene $x_n = 0$ ist daher in $K$ und so auch in $K$ enthalten.

Wir konstruieren nun zwei Doppelkegel $\Phi$ und $\varphi$ mit den Spitzen $+X_0$ und $-X_0$ bzw. über der Basis $K$ und der Basis $z$. Diese zwei Körper $\Phi$ und $\varphi$ sind wieder symmetrisch in bezug auf $O$ und konvex, und es ist offenbar $\varphi \subseteq \Phi \subseteq K$.

Wie schon erwähnt, ist $G$ nicht in $K$, also auch nicht in $\varphi$ enthalten. Da nun $O$ innerhalb, $X_0$ aber außerhalb von $G$ liegt, so enthält der Durchschnitt von $\varphi$ mit dem Teil von $\varGamma$, der im Halbraum $x_n \geq 0$ liegt, eine größte Kugelkappe $P$ mit Mittelpunkt im Punkte $X^* = (0, 0, \ldots, 0, 1)$. Diese Kugelkappe $P$ besteht aus allen Punkten $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ auf $\varGamma$ mit der Eigenschaft

$$
\eta \leq x_n \leq 1;
$$

dabei bedeutet $\eta$ eine gewisse Zahl mit $0 \leq \eta < 1$. Daher kann $P$ auch als die Menge aller Punkte $X$ auf $\varGamma$ mit

$$
|X - X^*| \leq \sqrt{2(1 - \eta)}
$$

aufgefaßt werden. Andererseits liegt $X^*$ von wenigstens einem der Punkte $\mp Q_k$ in einer Entfernung kleiner als $\delta$, und kein Punkt $\mp Q_k$ kann zu $P$ gehören. Daher muß

$$
\sqrt{2(1 - \eta)} < \delta, \quad \text{d.h.} \quad \eta > 1 - \frac{\delta^2}{2}
$$

sein.

Indem wir nun den Rand von $P$ von dem Punkte $X_0$ aus auf die Ebene $x_n$ projizieren, erhalten wir die Proportion

$$
d : \sqrt{1 - \eta^2} = \xi : (\xi - \eta).
$$

Hier ist

$$
|1 - \eta^2| < \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\delta^2}{2}\right)^2} < \delta \quad \text{und} \quad \xi > 2, \ \eta \leq 1, \ \xi - \eta > \frac{1}{2} \xi, \ \frac{\xi}{\xi - \eta} < 2
$$

und daher schließlich

$$
d : \delta < 2 : 1, \ d < 2\delta.
$$
In den beiden Punkten $\Xi$ und $-\Xi$ bringen wir nun ein Paar paralleler Stützebenen von $K$ an. Diese Stützebenen begrenzen einen Parallelstreifen der Dicke 

$$2d < 4\delta,$$

in welchem $K$ enthalten ist. Da andererseits $K$ auch eine Teilmenge der Kugel $G_\delta$ ist, so liegt $K$ vollständig in einem Zylinder der Höhe $4\delta$ und mit einem Querschnitt vom $(n-1)$-dimensionalen Inhalt 

$$c_2 r^{n-1};$$

$c_2$ bezeichnet hier den Inhalt der $(n-1)$-dimensionalen Einheitskugel. Also ergibt sich die Abschätzung 

$$V(K) < 4\delta \cdot c_2 r^{n-1}$$

und damit die Behauptung, falls 

$$c_1 = \max(V(G_\delta), 4c_2)$$

gewählt wird.

4. Sei $A$ ein beliebiges $\Sigma$-zulässiges $n$-dimensionales Gitter. Eine gewisse (möglichweise verschwindende) Anzahl von primitiven Punkten dieses Gitters$^3$ liegt im Innern von $G_\delta$; seien das genau die Punkte $\mp Y_1, \mp Y_2, \ldots, \mp Y_p$. Die Vorzeichen lassen sich so wählen, daß es zu jedem dieser Gitterpunkte $Y_h$ einen eindeutig bestimmten Index $j = j(h)$ gibt, derart daß 

$$Y_h = s_h Q_j \quad \text{und} \quad 1 \leq s_h < r$$

ist; denn Punkte nicht von dieser Form im Innern von $G_\delta$ liegen auch im Innern von $\Sigma$. Verschiedenen Punkten $Y_h$ und $Y_k$ kann offenbar nicht dasselbe Index $j$ entsprechen. Es läßt sich daher die Bezeichnung ohne Beschränkung der Allgemeinheit so umändern, daß gerade 

$$Y_h = s_h Q_h \quad \text{und} \quad 1 \leq s_h < r \quad (h = 1, 2, \ldots, p)$$

ist. Nach der Definition von $Q_h$ läßt sich alsdann $Y_h$ auch in der Form 

(3) 

$$Y_h = t_h X_h \quad (h = 1, 2, \ldots, p)$$

darstellen, wo jetzt $t_1, t_2, \ldots, t_p$ gewisse von Null verschiedene reelle Zahlen sind.

5. Von den $p$ Gitterpunkten $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ seien genau $q$ linear unabhängig, etwa die Punkte $Y_1, Y_2, \ldots, Y_q$, dabei ist natürlich 

$$q \leq \min(n, N, p).$$

$^3$) $Y \in A$ heißt primitiv, falls $Y \mp O$ ist und es keinen Gitterpunkt der Form $tY$ mit $0 < t < 1$ gibt.
Falls \( q < p \) ist, lassen sich die \( p - q \) übrigen Punkte \( Y_{q+1}, Y_{q+2}, \ldots, Y_p \) durch diese Basis in der Form

\[
Y_h = \lambda_{h1} Y_1 + \lambda_{h2} Y_2 + \cdots + \lambda_{hq} Y_q \quad (h = q + 1, q + 2, \ldots, p)
\]
ausdrücken. Dabei sind die Koeffizienten \( \lambda_{hk} \) gewisse rationale Zahlen, und wegen \( Y_h \neq 0 \) sind \( \lambda_{h1}, \lambda_{h2}, \ldots, \lambda_{hq} \) für keinen Index \( h \) alle gleichzeitig Null.

Aus (3) folgen nun die äquivalenten Beziehungen

\[
t_h X_h = \lambda_{h1} t_1 X_1 + \lambda_{h2} t_2 X_2 + \cdots + \lambda_{hq} t_q X_q \quad (h = q + 1, q + 2, \ldots, p).
\]

Nachdem hier die Koordinaten

\[
X_h = (x_{h1}, x_{h2}, \ldots, x_{hn})
\]
eingesetzt worden sind, erhalten wir daher das System von \( n(p-q) \) homogenen linearen Gleichungen

(4) \[
t_h x_{hk} = \lambda_{h1} t_1 x_{1k} + \lambda_{h2} t_2 x_{2k} + \cdots + \lambda_{hq} t_q x_{qk} \quad (h = q + 1, q + 2, \ldots, p; \quad k = 1, 2, \ldots, n)
\]
für die \( p \) Größen \( t_h \neq 0 \).

Lemma 3. Es ist entweder \( q = p \) oder \( q = p - 1 \).

Beweis. Sei die Behauptung falsch und daher \( q \leq p - 2 \), so daß die Gln. (4) wenigstens für \( h = q + 1 \) und \( h = q + 2 \) erfüllt sind. Keiner der hier auftretenden Koeffizienten

\[
\lambda_{hk} \quad (h = q + 1, q + 2; \quad k = 1, 2, \ldots, n)
\]
kann gleich Null sein. Denn sei etwa \( 1 \leq r < n \) und

\[
\lambda_{q+1,k} \neq 0 \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots, v; \quad \lambda_{q+1,k} = 0 \quad \text{für} \quad k = v + 1, v + 2, \ldots, n.
\]

Die \( v + 1 \) aus (4) entspringenden Gleichungen

\[
t_{q+1} x_{q+1,k} = \lambda_{q+1,1} t_1 x_{1k} + \lambda_{q+1,2} t_2 x_{2k} + \cdots + \lambda_{q+1,v} t_v x_{vk} \quad (k = 1, 2, \ldots, v + 1)
\]
für die nicht-verschwindenden Zahlen \( t_1, t_2, \ldots, t_v, t_{q+1} \) verlangen, daß ihre Determinante

\[
\left| x_{q+1,k}, \lambda_{q+1,1} x_{1k}, \lambda_{q+1,2} x_{2k}, \ldots, \lambda_{q+1,v} x_{vk} \right|_{k=1,2,\ldots,v+1}
\]
gleich Null ist. Aber dann sind, gegen die Voraussetzung, nicht alle \( nN \) Koordinaten \( x_{hk} \) algebraisch unabhängig über dem rationalen Körper.

Für die Werte \( h = q + 1 \) und \( h = q + 2 \) erhalten wir also aus (4) ein System von \( 2n \) homogenen linearen Gleichungen für die \( q + 2 \) Größen \( t_1, t_2, \ldots, t_{q+2} \), die wieder alle von Null verschieden sind. Wegen \( n \geq 2 \) und \( q \leq n \) ist jedoch \( 2n \geq q + 2 \). Die Koeffizientenmatrix hat daher höchstens den Rang \( q + 1 \), und es ergibt sich erneut der Widerspruch, daß die in ihr auftretenden Koordinaten \( x_{hk} \) einer nicht-trivialen algebraischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten genügen.
6. Lemma 4. Es gibt eine nur von \( n \) abhängige Konstante \( c_3 > 0 \), derart, daß
\[
\Lambda(\Sigma) \geq c_3 r^{n-1}.
\]

Beweis. Nach dem letzten Hilfssatz kann, von einem Proportionalitätsfaktor abgesehen, höchstens eine Gleichung
\[
z_h Y_h + z_k Y_k + z_l Y_l = 0
\]
mit von Null verschiedenen rationalen Koeffizienten gelten; dabei sind \( h, k, l \) irgend drei verschiedene der Indizes \( 1, 2, \ldots, \hat{p} \). Demnach ist für \( h \neq k \) immer nur höchstens einer der beiden Gitterpunkte \( Y_h + Y_k \) und \( Y_h - Y_k \) zu einem weiteren Gitterpunkt \( Y \) proportional. Nach der Definition dieser Punkte bedeutet dies, daß höchstens einer der beiden Punkte \( Y_h + Y_k \) und \( Y_h - Y_k \) im Innern von \( G \) liegen kann. Anders ausgedrückt, es muß wenigstens eine der beiden Ungleichungen
\[
|Y_h + Y_k| \geq r \quad \text{oder} \quad |Y_h - Y_k| \geq r
\]
gelten.

Sei jetzt etwa
\[
|Y_1| = \min(|Y_1|, |Y_2|, \ldots, |Y_p|).
\]
Es folgt dann für \( h = 2, 3, \ldots, \hat{p} \), daß
\[
r \leq |Y_1 + Y_h| \leq |Y_1| + |Y_h| \leq 2|Y_h|, \quad |Y_h| \geq \frac{r}{2}.
\]

Bedeutet jetzt \( E \) das Rotationsellipsoid in \( R_n \) mit einer Halbachse der Länge \( 1 \) in der Richtung \( OY_1 \), und mit \( n - 1 \) Halbachsen der Länge \( r/2 \) in Richtungen senkrecht zu \( OE_1 \). Das Innere von \( E \) enthält dann keinen der Punkte \( Y_1, Y_2, \ldots, Y_p \) und folglich überhaupt keinen von \( O \) verschiedenen Punkt von \( \Lambda \); d.h., \( \Lambda \) ist \( E \)-zulässig. Es ist also
\[
d(\Lambda) \geq \Lambda(E),
\]
und da dies für jedes \( \Sigma \)-zulässige Gitter gilt, so ist auch
\[
\Lambda(\Sigma) \geq \Lambda(E).
\]

Das Ellipsoid \( E \) hat den Inhalt
\[
V(E) = c_4 \cdot 1 \cdot \left( \frac{r}{2} \right)^{n-1},
\]
wobei \( c_4 = V(G) \) gesetzt wurde. Nach MINKOWSKIS Gitterpunktssatz ist andererseits
\[
\Lambda(E) \geq 2^{-n} V(E) = c_4 2^{-(2n-1)} r^{n-1}.
\]
Also erhalten wir die Ungleichung
\[
\Lambda(\Sigma) \geq c_4 2^{-(2n-1)} r^{n-1}
\]
und damit die Behauptung, falls \( c_3 = c_4 2^{-(2n-1)} \) gesetzt wird.
7. Aus Lemma 2 und 4 ergibt sich nun für jeden in \( \Sigma \) enthaltenen konvexen Körper \( K \), daß

\[
\frac{V(K)}{A(\Sigma)} < \frac{c_1 \max(1, \delta r^{n-1})}{c_3 r^{n-1}} = \frac{c_1}{c_3} \max(r^{-(n-1)}, \delta)
\]

ist. Genügen also \( \delta \) und \( r \) den Bedingungen

\[
\frac{c_1}{c_3} \delta < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \frac{c_1}{c_3} r^{-(n-1)} < \frac{\varepsilon}{2},
\]

so folgt die Ungleichung

\[
(5) \quad V(K) < \frac{\varepsilon}{2} A(\Sigma).
\]

Es ist jetzt zweckmäßig, \( \Sigma \) durch einen neuen Strahlenkörper \( \Sigma^* \) zu ersetzen; man erhält diesen, indem man zu \( \Sigma \) die \( 2N \) Punkte \( \pm Q_1, \pm Q_2, \ldots, \pm Q_N \) hinzufügt. Ein \( \Sigma\)-zulässiges Gitter ist offenbar auch \( \Sigma^*\)-zulässig, und umgekehrt; darum gilt

\[
A(\Sigma^*) = A(\Sigma).
\]

Ist ferner \( K^* \) irgendein \( \Sigma^* \) einbeschriebener konvexer Körper und liegt ein zweiter konvexer Körper \( K \) ganz im Innern von \( K^* \), so ist \( K \) auch im Innern von \( \Sigma \) enthalten. Es folgt daher leicht, daß die Ungleichung (5) bestehen bleibt, falls in ihr \( \Sigma \) durch \( \Sigma^* \) ersetzt wird. Also erfüllt \( \Sigma^* \) die Forderung (a) der Einleitung.

8. Sei \( \sigma > 0 \) eine sehr kleine Zahl, und bedeute \( T_h \) die Menge aller Punkte \( X \) der Form

\[
X = s Q_h + (s - 1) \sigma Y, \text{ wo } s > 1 \text{ und } |Y| < 1
\]

ist; \( T_h \) stellt also einen offenen Kegel mit der Spitze \( Q_h \) dar. Weiter sei \(-T_h\) die zu \( T_h \) in bezug auf \( O \) symmetrische Menge. Endlich bezeichne \( S_\sigma \) die Menge, welche aus allen Punkten \( X \) der Form

\[
|X| \leq r, \; X \not\subseteq T_h \quad \text{für} \quad h = 1, 2, \ldots, N
\]

besteht. Offenbar ist \( S_\sigma \) eine abgeschlossene Menge und ein Sternkörper.

Aus der Definition ergibt sich sofort, daß \( S_\sigma \subseteq \Sigma^* \) und für \( \sigma < \tau \) auch \( S_\sigma \subseteq S_\tau \) ist. Dies zieht für die Gitterdeterminante die Ungleichungen

\[
A(S_\sigma) \leq A(S_\sigma) \leq A(\Sigma^*) \quad \text{für} \quad 0 < \sigma < \tau
\]

nach sich. Wenn also \( \sigma \) gegen Null strebt, so wächst \( A(S_\sigma) \) monoton gegen einen Grenzwert, der nicht größer als \( A(\Sigma^*) \) sein kann.

In der Tat ist sogar

\[
\lim_{\sigma \to 0} A(S_\sigma) = A(\Sigma^*).
\]

Denn für jede natürliche Zahl \( k \) können wir ein \( S_{1/k}\)-zulässiges Gitter \( A_k \) so auswählen, daß

\[
d(A_k) < A(S_{1/k}) + \frac{1}{k}
\]
ist. Die Gitterfolge \( \{A_1, A_2, A_3, \ldots\} \) ist offenbar beschränkt, enthält also eine konvergente Teilfolge \( \{A_{k_1}, A_{k_2}, A_{k_3}, \ldots\} \), die etwa gegen das Gitter \( A_0 \) strebt. Dieses Gitter \( A_0 \) ist nun \( \Sigma^* \)-zulässig. Denn andernfalls gibt es in \( \Sigma^* \) einen inneren Punkt \( Z_0 \neq 0 \) mit \( Z_0 \in A_0 \). Alsdann besitzt \( A_{k_i} \) für alle genügend großen \( i \) einen Punkt in einer festen, beliebig kleinen Umgebung von \( Z_0 \). Dieser Punkt ist offenbar ein innerer, von \( O \) verschiedener Punkt von \( S_{1/k_i} \), so daß sich ein Widerspruch ergibt.

Da somit \( A(S_\sigma) \) gegen \( A(\Sigma^*) \) strebt, so gibt es einen Wert \( \sigma = \sigma_0 \), derart, daß

\[
A(S_{\sigma_0}) < \frac{1}{2} A(\Sigma^*)
\]

ist. Der Sternkörper \( S = S_{\sigma_0} \) erfüllt also die in der Einleitung gestellte Bedingung (b).

*Mathematics Department, The University, Manchester, England*

*(Eingegangen am 8. März 1956)*